NUMERE COMPLEXE

Numerele imaginare sunt reale

BARTOLO LUQUE

Traducere de Mariana Stan

LITERA
București

CUPRINS

Capitolul 0

Numerele imaginare sunt reale

Dumnezeu a făcut numerele naturale; restul este creat de om
Leopold Kronecker (1823-1891).

Atât cele dintâi inscripții numerice din istoria umanității, cât și cele mai vechi dovezi evidente de gândire matematică datează din paleoliticul superior, cu 30 000 de ani în urmă. Nu vom ști niciodată dacă primii oameni, care au cioplit semne pe oase, socoteau astfel ciclurile lunare sau zilele în care nu mâncau carne de mamut, dar arheologii sunt convinși că specia noastră a început să numere înainte de a scrie. Au început cu numerele naturale: 1, 2, 3, ... și apoi, după cum menționa în celebra sa frază cunoscutul **Leopold Kronecker** (1823-1891), matematicienii au stabilit restul. În Egiptul Antic s-au creat fracțiile, numerele raționale. Matematica greacă a intrat în criză odată cu descoperirea numerelor iraționale: numere incomensurabile care nu se puteau reprezenta prin fracții. Numerele negative au apărut mai întâi în China și în India, însă nu au fost acceptate în Europa până la Renaștere, cum s-a întâmplat cu zero, invenția fundamentală a sistemului nostru actual de numerație.

Algebra, originară din India și dezvoltată de către arabi, a conferit cetățenie numerică lui zero și numerelor negative. Arabii numeau necunoscuta *shay*, cuvânt care poate fi tradus ca *lucru*. În multe traduceri se scria latinizat ca *xay* și, de aici, prin prescurtare, a rămas *x*. În Italia renascentistă, *shay* s-a tradus cu termenul *cosa* *(lucru)*, iar cei care rezolvau ecuații erau numiți „cosisti”. Aceștia rezolvau ecuații ca $x+3=0$, a cărei soluție este $x=-3$, un număr negativ, sau ecuația $x+3=3$, a cărei soluție este zero. Rezolvau, de asemenea, ecuații pătratice. Abordând însă câteva dintre ele, au dat peste niște numere noi și ciudate. Când încercau să rezolve o ecuație de tipul $x^2+3=0$, obțineau ca soluții $x=\pm\sqrt{-3}$. Ce însemna radicalul unui număr negativ? Constatarea nu era cu totul nouă, prima referire la rădăcini pătrate ale numerelor negative apare încă din secolul I în lucrarea *Stereometria* a matematicianului grec **Heron din**

Civilizație	Epoca cu cea mai mare relevanță	Exemple de numere	Fracții	Zero pozițional	Zero	Negative	Numere imaginare	Axa numerelor
Preistorie	<3 000 î.Hr.	I II III	✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3 ...
Egipt Antic	1 740 î.Hr.		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Babilonia	3 000 î.Hr.		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Cultura olmecă	700-400 î.Hr.		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Grecia	500 î.Hr.-100 d.C.	ΣMA	✓	✗	✗	✗	✗	1 2 3
China	200 î.Hr.-200 d.Hr.		✓	✓	✗	✓	✗	-3 -2 -1 1 2 3
Roma	27 î.Hr.-476 d.Hr.	II III VII	✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3 ...
Cambodgia	700 d.Hr.		✓	✓	✓	✗	✗	1 2 3
India și Persia	600-1 000 d.Hr.		✓	✓	✓	✓	✗	-3 -2 -1 0 1 2 3
Europa medievală	500-1 400 d.Hr.	II III VII	✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3 ...
Europa renacentistă	1 300-1 400 d.Hr.	1, 2, 3	✓	✓	✓	✓	✗	-3 -2 -1 0 1 2 3
Era modernă	>1 700 d.Hr.	1, 2, 3	✓	✓	✓	✓	✓	

Figura 1. Începând din preistorie, axa numerelor, adică dreapta pe care sunt localizate numerele, s-a umplut încetul cu încetul, până când a ajuns completă. Numerelor naturale li s-au adăugat fracțiile, cunoscute de către egipteni și babilonieni, dar folosite și de alte civilizații, precum cea olmecă. Numerele iraționale apar în Grecia Antică. În China îndrăznesc să folosească numerele negative, la care se alătură zero în India. În perioada Renașterii, cu axa numerelor plină deja, are loc o descoperire ciudată și nouă: numerele complexe.

Alexandria. Ca tuturor matematicienilor de-a lungul istoriei până la Renaștere, și lui trebuie să-i fi părut un nonsens acești radicali ai numerelor negative.

Ne amintim cu toții de la orele de matematică din adolescență formula soluției generale a ecuației de gradul doi, $ax^2 + bx + c = 0$ unde a, b și c sunt numere reale. Matematicienii din Renaștere cunoșteau și ei că soluțiile acestei ecuații sunt date de

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La fel cum există o soluție generală pentru ecuația de gradul al doilea, există o formulă pentru rezolvarea celei de gradul al treilea, pentru $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Nașterea sa în Italia renascentistă de la începutul secolului al XVI-lea a fost o adevărată tragicomedie. La acea vreme, maestrul **Luca Pacioli** (1445-1517) a comparat dificultatea rezolvării ecuației de gradul al treilea cu vechea problemă a cuadraturii cercului: o celebră problemă rămasă nerezolvată din vremurile Greciei Clasice în care se încearcă să se construiască un pătrat cu aria egală cu a unui cerc dat, folosind doar echerul și compasul. Rezolvarea ecuației de gradul al treilea a devenit marea provocare pentru *cosisti* momentului și, prin urmare, a matematicii. În acest punct al istoriei putem situa nașterea unor noi numere ce vor constitui tema acestei cărți: numerele complexe, care vor schimba istoria matematicii și a științei.

Tragicomedia ecuației de gradul al treilea

> Dezvoltarea economică și comercială în Italia secolului al XII-lea a creat necesități formative noi. Împreună cu mătasea și mirodeniile se importă sistemul de numerație hindus, algebra arabă și operele matematice ale Greciei Antice. Școlile care foloseau abacul răspândesc aceste noi cunoștințe, formând negustori și meșteșugari. [...] La începutul secolului al XVI-lea, se creează condiții pentru ca matematica

să avanseze. Del Ferro și Tartaglia rezolvă ecuația de gradul al treilea, Ferrari pe cea de gradul al patrulea și Cardano publică ambele soluții în mijlocul unei mari dispute. [...] Toți protagoniștii acestei istorii sunt oameni ai Renașterii, cu spirit polemic, avizi de cunoaștere și plini de idei.

(Francisco Martín Casalderrey,
Cardano și Tartaglia. Matematica în Renașterea italiană)

Povestea noastră începe la Universitatea din Bologna care, întemeiată în 1088, este cea mai veche din Europa. Acolo, în 1496, își desfășura activitatea matematicianul **Scipione del Ferro** (1465-1526). Deși este descris în diverse surse ca un mare specialist în algebră, nu s-au păstrat lucrări originale din opera sa. Știm, totuși, că a fost primul care a găsit o soluție pentru ecuația de gradul al treilea. Mai exact, a rezolvat un caz particular pe care îl numea: „Necunoscute și cuburi egale cu numere", care, în versiune modernă, ar fi: $x^3+px=q$, unde p și q sunt numere reale. Soluția propusă de către Del Ferro a fost următoarea expresie intimidantă:

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Cum a obținut Del Ferro acest rezultat continuă să fie o enigmă din istoria matematicii. Pentru că nu știm, nu cunoaștem cu exactitate nici anul în care a reușit, probabil între 1505 și 1515. Del Ferro nu a divulgat nimănui „secretul său". Ceva identic se dovedește mai mult decât surprinzător în zilele noastre, când competiția pentru câștigarea unui loc stabil de cercetător este înverșunată și presiunea suferită de aspiranți se reflectă în cunoscutul slogan: „publicați sau pieriți". Menținerea în secret însă a descoperirilor matematice a fost obișnuită până în secolul al XVIII-lea și cu siguranță că nu doar o descoperire s-a dus în mormânt împreună cu descoperitorul său. Cu puțin înainte de a trece la cele veșnice, pe patul de moarte, Del Ferro i-a destăinuit secretul ginerelui său **Annibale della Nave**. Scopul era să-i asigure succesiunea la catedra sa și cu asta mijloacele de trai propriei sale fiice și nepoților. Se înțelege acum relevanța secretului? La dezvăluire a asistat și elevul său, venețianul **Antonio Maria del Fiore**.

Altul dintre motivele pentru care se țineau în secret rezultatele matematice era să-și asigure victoria în dispute. În secolul al XVI-lea, orice matematician sau erudit putea fi provocat de altcineva la o confruntare publică. De multe ori era un pariu la mijloc, miza putea fi de la unul dintre puținele posturi universitare până la o creștere de salariu. Mai presus de toate însă era în joc reputația combatanților. Confruntările intelectuale erau de mare importanță socială, întreg orașul își exprima părerea și chiar făcea pariuri și, în căutarea acestui prestigiu, Del Fiore, care ținea acum ca pe o avere secretul lui Del Ferro, l-a provocat în 1535 pe celebrul matematician **Niccolò Fontana Tartaglia** (1499-1557).

Să ne mutăm acum din înțeleapta Bologna în frumoasa Veneție, unde trăia matematicianul poreclit **Tartaglia**, „bâlbâitul". Defectul său de vorbire a fost provocat de o lovitură de sabie pe care a primit-o în gât, la 12 ani, de la un soldat francez. A fost considerat mort, însă datorită dârzeniei mamei și, citez textual pe unul dintre biografii săi, „unui câine care i-a lins rănile", a reușit să supraviețuiască. Tartaglia provenea dintr-o familie foarte săracă. Tatăl său, poștaș, a murit tânăr, lăsând mamei grija întreținerii mai multor copii. Mario Livio, în excelenta sa carte *Ecuația niciodată rezolvată*, comentează în acest sens că „A trebuit să-și abandoneze studiile de lectură și scrierea alfabetului ajungând la litera *k*, pentru că familia a rămas fără bani pentru plata tutorelui". Tartaglia a câștigat o reputație ca matematician rezolvând câteva probleme de

Figura 2. Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557).

artilerie pentru inginerii de la Arsenalul Venețian, iar renumele său a ajuns la urechile lui Del Fiore care, dotat cu „secretul său”, formula magică a lui Del Ferro, i-a adresat în 1535 o provocare la o dispută publică.

Fiecare dintre adversari a formulat 30 de probleme de matematică pentru celălalt. Cel care pierdea avea de plătit o cină câștigătorului și atâtor prieteni câte probleme ar fi rezolvat. Timp de 48 de zile Tartaglia a întors pe toate părțile cele 30 de probleme ale lui Del Fiore fără să rezolve niciuna. Toate cereau soluții la ecuațiile de gradul al treilea. Timpul presa, pentru că în 8 zile trebuia să înregistreze soluțiile în fața notarului. În noaptea de 12 februarie 1535, s-a făcut lumină și a fost capabil să descopere secretul lui Del Fiore. Dintr-o suflare a rezolvat cele 30 de probleme... Și Del Fiore? A pierdut lamentabil și nu a fost în stare să rezolve niciuna dintre cele 30 de probleme ale lui Tartaglia, care în cele din urmă l-a iertat de achitarea cinei. Peste noapte, Tartaglia s-a transformat într-o celebritate matematică, în timp ce Del Fiore s-a pierdut în negura istoriei. Rezultatul luptei s-a răspândit ca fulgerul prin toată Italia și a ajuns la auzul celui de-al cincilea personaj al nostru, **Gerolamo Cardano** (1501-1576), fără nicio îndoială cel mai deosebit dintre ei.

Figura 3. Gerolamo Cardano (1501-1576).

De origine umilă, Cardano era copil din flori și a trebuit să își plătească studiile cu jocul de noroc, pariind la cărți, la zaruri sau la șah. Cu toate acestea, era un geniu capabil de a face din viciile sale virtuți: grație experienței sale la joc a scris prima carte de teoria probabilității, *Liber de ludo aleae* („Cartea jocurilor de noroc”), publicată postum în 1663. Probabil din acele medii a luat manierele de necioplit și palavragiu cu care a câștigat multe dezbateri publice. Nu a fost doar un mare teoretician, ci a ajuns să devină unul dintre medicii cei mai renumiți din Europa și, de asemenea, un mare inventator: cardanul, acea piesă mecanică care permite transmiterea unei mișcări de rotație la două axe cu direcții diferite, pe care astăzi le au autovehiculele, a fost o invenție de-a sa, după cum sugerează și numele. În momentul istoric în care ne aflăm, Cardano își redacta a doua lucrare și a considerat indispensabil să includă în ea și formula lui Tartaglia. A încercat în zadar s-o deducă și atunci a decis să-l convingă pe Tartaglia să-i dezvăluie secretul. După mai multe refuzuri epistolare de genul: „când voi hotărî să fac publică invenția mea va fi în propria mea carte și nu într-una aparținând altora ...", Tartaglia a cedat în cele din urmă, cu ocazia unei întâlniri din 25 martie 1539 la Milano. Acolo, Cardano i-a făcut următoarea promisiune:

> Jur înaintea ta pe Sfintele Evanghelii și pe credința mea de cavaler, nu doar să nu public niciodată descoperirile tale, dacă mi le dezvălui, ci, de asemenea, că promit și angajez credința mea ca adevărat creștin că le voi scrie codat, pentru ca, după moartea mea, nimeni să nu le poată descifra. Dacă eu, în opinia dumneavoastră sunt un om cinstit, spuneți-mi-o, iar dacă nu este așa, să considerăm încheiată această discuție.

Răspunsul lui Tartaglia a fost: „Dacă nu aș avea încredere într-un jurământ ca al dumneavoastră, atunci, desigur, eu însumi aș merita să fiu considerat un ateu". Și i-a încredințat formula printr-un poem mnemonic, după cum era obiceiul în epocă:

> Când cubul și lucrurile împreună
> Sunt egale unui număr discret [în notație modernă $x^3 + px = q$],
> Întâlnește alte două numere a căror diferență o va egala [întâlnește u, v astfel că $u - v = q$].
> Atunci vei păstra aceasta ca un obicei:
> Ca produsul să fie întotdeauna același
> Exact cubul unei treimi din lucruri [$uv = (p/3)^3$].

Restul atunci ca regulă generală
Din rădăcinile cubice scăzute
Va fi egal cu lucrul principal [$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$].

Să observăm că în ecuația lui Del Ferro *u* și *v* sunt exprimate ca:

$$u = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ și } v = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \,.$$

Și într-adevăr: $u - v = q$ și $uv = (p/3)^3$, cum se poate ușor verifica.

Ne reîntoarcem la Bologna pentru că ne lipsește ultimul personaj din tragicomedie: **Ludovico Ferrari** (1522–1565). Pe vremea aceea avea 17 ani și era servitor în casa lui Cardano. Cu stăpânul său a învățat matematică și a ajuns să-i devină coleg și prieten. De fapt, Ferrari a fost pentru Cardano fiul pe care l-a dorit mereu, deși a avut doi biologici, de care știm: primul a fost executat pentru că și-a otrăvit soția, iar al doilea a fost un ticălos care a ajuns pe drumul pierzaniei. În 1542, Cardano și Ferrari au obținut permisiunea de la Annibale della Nave să scotocească printre hârtiile socrului său, Del Ferro, mort deja de 16 ani. Căutările lor au avut succes, găsind celebra formulă care coincidea cu cea descoperită de către Tartaglia cu ocazia provocării. Deoarece nu fusese cel dintâi descoperitor, fără să își calce cuvântul, Cardano s-a văzut liber s-o publice, atribuindu-i paternitatea lui Del Ferro. Astfel a apărut în *Ars magna* din 1545, operă considerată ca data de naștere a numerelor complexe și începutul algebrei moderne.

Figura 4. Coperta originală a *Artis magnae, sive de regulis algebraicis*, mai cunoscută ca *Ars Magna* (*Marea Artă*).

Cu toate că în carte Cardano îi mulțumește de două ori lui Tartaglia, „prietenul" său, pentru că i-a dat formula, Tartaglia este foc și pară de supărat. Începe atunci un schimb de scrisori publice incendiare între Tartaglia și Ferrari, diferend în care Cardano nu intervine. Polemica dintre ei culminează în 10 august 1548 cu o confruntare publică de 31 de probleme în Milano, la biserica Santa María del Giardino. Rezultatul i-a pus capăt lui Tartaglia, abandonând disputa înainte chiar să se termine și fără ca adversarul Cardano să binevoiască măcar să apară. Tartaglia s-a întors umilit la Veneția, unde a murit în 1557 în aceeași sărăcie în care a trăit toată viața. Cardano și-a continuat cariera fulminantă, de data aceasta dedicându-se astrologiei până la îndrăzneala extremă de a scrie horoscopul lui Hristos însuși. Inchiziția l-a băgat la închisoare, până ce chiar Papa a intervenit în favoarea sa. Cel mai fascinant este că a prevăzut corect ziua morții sale, deși trișând puțin: s-a sinucis în ziua prorocită.

Operarea cu numere complexe

În facultate aveam un profesor șchiop pe care îl numeam complexul.
Avea un picior real și altul imaginar.
(Crudul student anonim)

Cardano a generalizat soluția lui Tartaglia pentru ecuația de gradul al treilea, iar elevul său, Ludovico Ferrari, a găsit soluția pentru ecuația de gradul al patrulea. Toate aceste descoperiri au fost publicate de către Cardano în 1545 în celebra sa *Ars Magna*, în care apar primele calcule explicite din istorie cu numere complexe. Un exemplu cuprins în lucrare este următoarea problemă: „Împarte 10 în două părți, astfel încât una înmulțită cu cealaltă să dea 40". Cu notația modernă este vorba de rezolvarea ecuației pătratice: $x(10-x)=40$. Cele două soluții la care a ajuns Cardano erau: $x=5\pm\sqrt{-15}$, două numere complexe, pe care le numea „soluții intrigante". Cardano, ca toți matematicienii înainte de el, nu găsea niciun sens rădăcinii pătrate a unui număr negativ. Rădăcinile pătrate ale numerelor negative, cugeta el, ne cer să găsim un număr care înmulțit cu el însuși să dea un rezultat negativ. Era de părere, însă, că nici numerele pozitive, nici cele negative nu pot satisface această condiție; și de aceea se referea la ele considerându-le „cantități sofistice”. Acest tip de ecuații pătratice având ca soluții rădăcini negative erau cunoscute încă din Antichitate, însă matematicienii nu au simțit nevoia de a merge mai departe și au rezolvat problema zicând pur și simplu că ecuația nu avea soluție. Cardano a fost ceva mai curajos arătând, în cazuri simple ca acesta, că, în mod formal, aceste cantități sofistice erau soluții: „[...] Înmulțind $x=5+\sqrt{-15}$ cu $10-x=5-\sqrt{-15}$, obținem $25-(-15)=25+15$. Prin urmare rezultatul este 40”. Problema, însă, devenea „intrigantă” observând cum, aplicându-se demonstrata formulă a lui Cardano-Del Fierro pentru ecuația generală de gradul al treilea, de exemplu, la $x^3-15x=4$, pentru care știau că $x=4$ era soluție, le returna babilonia:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}},$$

unde apăreau rădăcini pătrate de numere negative care, la rândul lor, se aflau în rădăcini cubice.

A trebuit să treacă o generație de matematicieni pentru a mai avansa încă un pas. A fost **Rafael Bombelli** (1526-1572), și el discipol al lui Cardano, care a avut curajoasa idee de a presupune că pur și simplu exista un nou tip de numere al căror pătrat era negativ. În loc să facă speculații privind natura acestora, Bombelli a operat simplu cu rădăcinile numerelor negative cum ar fi făcut dacă ar fi rădăcini de numere pozitive. Astfel, ridicând la pătrat rădăcina lui minus unu, obținem minus unu. Bombelli a remarcat că, dacă se extindea sistemul numeric existent, cum s-a procedat anterior cu fracțiile, zero și numerele negative, se puteau rezolva probleme care altfel erau irezolvabile. Dacă aceste noi numere erau o „descoperire” și nu